UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Números Complexos Para o Ensino Médio: Uma Abordagem Com História, Conceitos Básicos e Aplicações

Salomão Pereira de Almeida

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva

Campina Grande - PB
Março/2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG.

A447m Almeida, Salomão Pereira de.

Números Complexos Para o Ensino Médio: uma abordagem com história, conceitos básicos e aplicações / Salomão Pereira de Almeida. Campina Grande, 2013.

60 f.:il. color

Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

Referências.

Orientador: Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva.

1. Equações Algébricas 2. Números Complexos 3. Aplicações de Números Complexos

I. Título.

CDU-512.5(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

NÚMEROS COMPLEXOS PARA O ENSINO MÉDIO: Uma Abordagem Com História, Conceitos Básicos e Aplicações

por

Salomão Pereira de Almeida †

Trabalho Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Bolsista CAPES

NÚMEROS COMPLEXOS PARA O ENSINO MÉDIO: Uma Abordagem Com História, Conceitos Básicos e Aplicações

por

Salomão Pereira de Almeida

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:

Prof. Dr. Aparecido Jesuino de Souza – UFCG

Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira – UEPB

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva – UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Março/2013

Agradecimentos

À Deus

Por ter me driblado diante de tantas dificuldades; por ter me dado inteligência suficiente para saber ser filho, esposo e professor; por ter me feito entender que o curso de Matemática é também uma oportunidade de mostrar o tamanho do Seu poder; por ter me honrado com uma Pós-Graduação; pela misericórdia; pela justiça; pela Sua presença; por me dizer: "EU SOU CONTIGO POR ONDE QUER QUE ANDARES"; e eu hoje O digo: "Esta vitória é Sua, SENHOR, porque em Ti confiei e hoje vejo a Tua glória".

À Dona Alice

Minha mãe pelo exemplo.

À Adriana

Minha esposa, pelo incentivo, pela paciência, pelo amor...

Ao Professor Diogo Diniz

Pela sua amizade, dedicação e paciência em me ajudar a concluir este Trabalho de Conclusão de Curso.

À Sociedade Brasileira da Matemática e à CAPES

Pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e pela concessão da bolsa.

Sem vocês este trabalho não seria realizado. Muito Obrigado.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma proposta de ensino de Números Complexos através de resolução de problemas. Nosso intuito é criar um material com aplicação direta na sala de aula de Matemática na educação básica, contribuindo para o enriquecimento do ensino de Números Complexos. Reconstituímos parcialmente a sua história destacando motivos que levaram os matemáticos da época à descoberta destes números. São propostos problemas que envolvem conceitos básicos que são resolvidos usando Números Complexos. Estes problemas envolvem Álgebra, Geometria Plana e Analítica, Trigonometria, Séries e Aritmética.

Palavras Chaves: Equações Algébricas, Números Complexos, Aplicações de Números Complexos.

Abstract

In this work we propose a problem-solving approach to teaching Complex Numbers. Our aim is to create a material with direct application in the mathematics classroom in Secondary school, to contribute to enrich the teaching of Complex Numbers. We reconstructed partially their history leading the reader to feel the real reasons why mathematicians of that time discovered such numbers. We present some problems involving basic concepts that are solved by using Complex Numbers. These problems are related to Algebra, Plane Geometry, Trigonometry, Arithmetic and Series.

Keywords: Algebraic Equations, Complex Numbers, Applications of Complexs Numbers.

Sumário

1 Introdução **3**

1.1 Caráter Inovador do Trabalho 5

1.2 Objetivos 5

1.3 Organização 5

1.4 Materiais e Tecnologias 6

1.5 Recomendações Metodológicas 6

2 Um Pouco de História e os Números Complexos **7**

2.1 Aula 1 8

2.2 Aula 2 10

2.3 Aula 3 12

3 Conceitos Básicos **14**

3.1 Aula 1 16

3.2 Aula 2 18

3.3 Aula 3 20

3.4 Aula 4 23

3.5 Aula 5 24

3.6 Aula 6 25

3.7 Aula 7 27

4 Aplicações dos Números Complexos **29**

4.1 Aula 1 31

4.2 Aula 2 34

4.3 Aula 3 38

4.4 Aula 4 40

4.5 Aula 5 42

4.6 Aula 6 44

4.7 Aula 7 46

4.8 Aula 8 48

5 Conclusões **50**

Referências Bibliográficas **51**

A Um Pouco Mais de História **52**

Capítulo 1

Introdução

Na obra "Exames de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio", de autoria de Elon Lages Lima et al [5], doze coleções de livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio foram analisadas por oito matemáticos. Após a leitura das críticas e sugestões, senti-me desafiado a ministrar minhas aulas de acordo com a seguinte orientação:

> *"A análise dos livros-textos para o ensino da Matemática na Escola Média deve levar em conta, acima de tudo, sua adequação às três componentes básicas desse ensino, a saber: Conceituação, Manipulação e Aplicação."*

Percebi que, na maioria dos livros didáticos do Ensino Médio, o capítulo sobre Números Complexos, limita-se a mostrar que esse conjunto é fechado em relação às operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, não mostrando, no entanto, situações em que eles podem ser aplicados.

Ministro o assunto de Números Complexos a alunos do Ensino Médio da rede pública e privada de Campina Grande há mais de uma década, e a experiência da sala de aula tem me mostrado que este modo de apresentar o assunto deixa inúmeras perguntas na mente do aluno, tais como: "Números Complexos existem?", "Esse assunto serve para alguma coisa?", "Há algum problema físico no qual eles podem ser aplicados?"

Com o intuito de responder afirmativamente às perguntas feitas acima, apresento neste trabalho algumas aplicações dos Números Complexos, usando-os como recurso para resolver problemas de Geometria Plana.

Ao revisar a bibliografia para elaboração deste trabalho, observei que as propriedades gráficas e algumas aplicações importantes dos números complexos não são abordadas nas escolas. Há também pouco conteúdo em livros didáticos. Encontra-se alguns teoremas que associam Geometria Analítica com Números Complexos em algumas apostilas e material resumido, na internet. Em geral, esses materiais estão destinados a um público restrito: em alguns casos são para alunos que pretendem participar de olimpíadas de matemática ou vestibulares do ITA e do IME; em outros, parecem destinar-se a professores em cursos de formação ou em congressos matemáticos.

Acreditamos que, a ausência de aplicações dos números complexos à Geometria nos livros didáticos do ensino médio, deve-se ao fato de não haver essa exigência explícita nos PCN. Aliás, os números complexos sequer são mencionados nos PCN. Porém, em nosso entender, ressaltar o vínculo entre Números Complexos e Geometria Plana, explicita sua aplicabilidade e sua funcionalidade.

Outro problema comum nos livros didáticos do Ensino Médio, nos capítulos sobre Números Complexos, está relacionado ao seu surgimento. Grande parte dos livros de Ensino Médio ou não trazem a história ou afirmam que seu surgimento está relacionado às equações algébricas de grau 2, e não às de grau 3.

Analisando os livros de Ensino Médio mais adotados nas escolas brasileiras, os professores Augusto César Morgado e Eduardo Wagner, [5], questionam:

> *"Certamente os complexos não teriam sido criados se o motivo fosse esse: fazer com que todas as equações do segundo grau tivessem solução. Por que não respeitar a história e mostrar que eles surgem para que se possa usar a Fórmula de Cardano no caso de a equação do terceiro grau ter três raízes reais?"*

Com o objetivo de resolver o problema da apresentação da história dos Números Complexos, comum em muitos livros do Ensino Médio, escrevemos o Capítulo 2 deste trabalho, onde propomos uma atividade cujo objetivo é reconstruir a história através dos problemas e das soluções encontradas pelos matemáticos da época.

1.1 Caráter Inovador do Trabalho

Queremos, neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do PROFMAT/UFCG, desenvolver uma estratégia metodológica mais eficaz no ensino de Números Complexos, trazendo uma abordagem histórica (Conceituação), sugerindo problemas que visam a construir os conceitos básicos sobre o assunto (Manipulação) e apresentando algumas aplicações (Aplicação).

Este trabalho segue a seguinte orientação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, [2]: *"Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial a uma formação geral e não apenas um treinamento específico."*

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo desenvolver uma metodologia de ensino que visa a melhorar a abordagem dos Números Complexos no Ensino Médio. Para isso, propomos uma sequência de atividades, que contém problemas resolvidos e comentados, distribuídos em três capítulos, em que aparecem respectivamente, a história, conceitos básicos e aplicações dos Números Complexos à Geometria Plana. Alguns dos problemas propostos são de nossa autoria, outros, foram retirados de vestibulares. As resoluções foram de nossa autoria (exceto os problemas 17b, 17c, 17d, 25 e 26) e tem o objetivo de auxiliar o professor.

1.3 Organização

Este TCC está organizado da seguinte forma: além desta Introdução (Capítulo 1), o Capítulo 2 apresenta uma lista de problemas com abordagem histórica do surgimento dos Números Complexos. O Capítulo 3 apresenta uma lista de problemas sobre conceitos básicos de Números Complexos. O Capítulo 4 aborda uma lista de problemas de Geometria Plana, em cuja resolução, aplicam-se os conceitos de Números Complexos. Em cada problema proposto nos Capítulos 2, 3 e 4, há um comentário com indicações de dificuldades esperadas dos alunos no desenvolvimento da resposta e orientações para o professor sobre como lidar com as mesmas. Em seguida, estão as Conclusões, as Referências e o Apêndice.

1.4 Materiais e Tecnologias

Os problemas propostos nos Capítulos 2 e 3 podem ser resolvidos em sala de aula, utilizando apenas lápis e quadro. Alguns dos problemas propostos no Capítulo 4 envolvem manipulações algébricas com representações geométricas. Por isso, torna-se trabalhoso para o professor que utiliza apenas o lápis e o quadro, representar os complexos no Plano de Argand-Gauss e esperar que o estudante "imagine" a rotação, a translação etc, entre tais números. Portanto, recomendamos o uso de "softwares" de geometria dinâmica. O Problema 18 (Pág. 38) requer o uso de uma planilha por envolver uma operação com grandes quantidades de dados numéricos.

1.5 Recomendações Metodológicas

Recomendamos que este material seja aplicado pelo professor em sala de aula do ensino médio, para alunos que tenham conhecimentos de Geometria Plana, Geometria Analítica e Trigonometria. O professor deve resolver todos os problemas na sequência em que estão dispostos, pois os problemas trazem consigo a progressividade dos conceitos.

Para o desenvolvimento das atividades propostas no Capítulo 2 são necessárias três aulas de 50 minutos cada. Para o Capítulo 3, são necessárias sete aulas de 50 minutos cada. E, para o Capítulo 4, são necessárias oito aulas de 50 minutos cada.

O professor deve estar atento ao fato de os Números Complexos serem mais eficientes para resolução de certos tipos de problemas, mas podem gerar dificuldades em problemas que admitem soluções mais diretas utilizando outros métodos.

Outras recomendações serão feitas ao longo do trabalho.

Capítulo 2

Um Pouco de História e os Números Complexos

Começamos aqui a reconstituição da história dos Números Complexos. Recomendamos que este Capítulo seja apresentado da seguinte maneira: na medida em que o professor for resolvendo os problemas, deve ir contando a história das equações algébricas e dos números complexos. Os problemas obedecem uma sequência didática e, nem sempre, cronológica. Isso se deve ao fato de nos preocuparmos primordialmente com o aprendizado do aluno sobre o assunto. Acreditamos que 3 aulas de 50 minutos sejam suficientes para exposição completa deste Capítulo, cujo objetivo é fazer o aluno sentir a necessidade da criação de um conjunto que também fosse capaz de realizar a radiciação com radicando negativo.

AULA 1: Na primeira aula, o professor deve comentar o modo como os matemáticos resolviam as equações e qual o entendimento que eles tinham sobre os tipos de soluções que eles encontravam. A partir daí, comentar o problema introdutório e resolver o Problema 1.

AULA 2: Na segunda aula, o professor deve resolver apenas o Problema 2, onde irá demonstrar a fórmula de Cardano-Tartaglia para resolução de equações do tipo $y^3 + py + q = 0$. É importante que o professor faça cada passo detalhadamente para que os alunos não tenham dúvida de que tudo foi feito corretamente, e, quando chegarem ao Problema 3, eles não achem que o método está errado, por encontrar uma solução "estranha".

AULA 3: Na terceira aula, o professor deve resolver os Problemas 3 e 4. O Problema 3 foi crucial no descobrimento (aceitação!) dos números complexos. O professor deve estar preparado para lidar com o fato polêmico: $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 4$. Foi exatamente este o fator determinante do surgimento dos complexos. Provavelmente os alunos não o aceitarão com naturalidade. As dúvidas serão esclarecidas na resolução do Problema 4, com a ideia da unidade imaginária.

2.1 Aula 1

Apresentamos um problema introdutório que não menciona o assunto que será estudado, mas a resolução o requer. A ideia aqui é propor aos alunos um problema que resulte numa equação algébrica do 3^o grau. Caso o professor ache necessário, ele pode começar a aula demonstrando a fórmula para resolução de equações do 2^o grau.

Problema introdutório: Em geral, as equações algébricas mais antigas tinham motivações geométricas. Os povos da Babilônia deixaram em seus tabletes de escritas cuneiformes vários exemplos de que eles dominavam o uso de equações. Num tablete babilônico que se encontra no museu britânico, em Londres, aparece o seguinte problema:

"Da área de um quadrado, eu subtraí um terão de seu lado e o resultado é 1/12. Quanto mede o lado do quadrado?"

Naturalmente a área e o lado de um quadrado não podem ser somados por serem entes diferentes, o que este problema quer dizer é que foram somados os respectivos valores numéricos. Em notação atual, o problema seria representado por "encontre um número real x tal que $x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{12}$", em que x é a medida de um lado do quadrado.

Imaginemos, agora, o seguinte enunciado:

"Do volume de um cubo, eu subtraí quinze vezes o seu lado e o resultado é 4. Quanto mede o lado do cubo?"

Em notação atual, o problema seria representado por "encontre um número real x talque $x^3 - 15x = 4 \Leftrightarrow x^3 - 15x - 4 = 0$".

Comentários: Obviamente os alunos não saberão resolver esta equação porque só conhecem, até este estágio, a fórmula para resolução de equação do 2^o grau. Esta é uma hora oportuna para o professor comentar com os seus alunos que os matemáticos do passado sentiram estas mesmas dificuldades. Logo após, ele deve ir mostrando como foi possível resolver situações como estas, passando para resolução dos problemas a seguir que levam à fórmula de Cardano-Tartaglia para resolução deste tipo de equação.

Problema 1: Considere a equação geral do 3^o grau, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, na variável x, com a, b, c e d reais, $a \neq 0$. Mostre que ela pode ser transformada em uma equação do tipo $y^3 + py + q = 0$ (Sugestão: faça a mudança de variável $x = \frac{y-b}{3a}$).

Solução:

Subsitituindo x por $x = \frac{y-b}{3a}$ na equação de 3^o grau dada, obtemos:

$a(\frac{y-b}{3a})^3 + b(\frac{y-b}{3a})^2 + c(\frac{y-b}{3a}) + d = 0.$

Desenvolvendo os parênteses, obtemos:

$$a(\frac{y^3 - 3y^2b + 3yb^2 - b^3}{27a^3}) + b(\frac{y^2 - 2yb + b^2}{9a^2}) + c(\frac{y-b}{3a}) + d = 0 \qquad (2.1)$$

Multiplicando os dois membros da equação (2.1) por $27a^2$, temos que

$y^3 - 3y^2b + 3yb^2 - b^3 + 3y^2b - 6yb^2 + 3b^3 + 9acy - 9acb + 27a^2d = 0$, donde segue que $y^3 + (9ac - 3b^2)y + (2b^3 - 9acb + 27a^2d) = 0$.

Fazendo $p = 9ac - 3b^2$ e $q = 2b^3 - 9acb + 27a^2d$, teremos $y^3 + py + q = 0$.

Comentários: O objetivo deste problema é convencer os alunos de que, numa equação geral do 3^o grau, sempre podemos eliminar o termo x^2. Sendo assim, saberemos resolver qualquer equação geral do terceiro grau se soubermos resolver equações do tipo $y^3 + py + q = 0$. A ideia de Tartaglia foi supor que a solução procurada é do tipo $y = A + B$.

2.2 Aula 2

Problema 2: Considere a equação:

$$y^3 + py + q = 0. \tag{2.2}$$

(a) Sejam A e B dois números reais e $y = A + B$. Prove que se y é uma raiz da equação (2.2), então $3AB = -p$ e $A^3 + B^3 = -q$. (Sugestão: note que $y^3 = A^3 + B^3 + 3ABy$).

Solução: Como $y^3 = A^3 + B^3 + 3ABy$ então, temos que $y^3 - 3ABy - (A^3 + B^3) = 0$. Comparando com a equação $y^3 + py + q = 0$, obtemos que $3AB = -p$ e $A^3 + B^3 = -q$.

Comentários: O fato curioso na estratégia de Tartaglia foi considerar a solução da equação como soma de duas incógnitas, $y = A + B$. Na maioria dos casos, o que se faz é exatamente o oposto, trocam-se duas incógnitas por uma para tornar a solução mais simples. Foi o que outros matemáticos fizeram, porém, não tiveram sucesso. Foi necessário que alguém tivesse uma ideia aparentemente ruim para se obter uma fórmula que resolvesse equação de grau 3.

(b) Prove que, nas condições do item (a), A^3 e B^3 são soluções da equação $w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0$ e que $A^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}$ e $B^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}$ (Sugestão: resolva a equação do 2^o grau).

Solução: Do problema anterior, temos $3AB = -p$, donde segue que $A^3B^3 = \frac{-p^3}{27}$. Como também temos que $A^3 + B^3 = -q$, segue que $w_1 = A^3$ e $w_2 = B^3$ são as soluções de $w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0$.

Se resolvermos a equação do 2^o grau acima usando a fórmula para encontrar raízes de equação do 2^o grau, temos que:

$$w_1 = A^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{(\tfrac{q}{2})^2 + (\tfrac{p}{3})^3} \quad \text{e} \quad w_2 = B^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{(\tfrac{q}{2})^2 + (\tfrac{p}{3})^3}.$$

(c) Mostre que uma raiz da equação do 3^o grau (2.2) é dada por
$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}$.

Solução: Basta substituir os valores de A e B, obtidos no item (b), para obter que $y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q^2}{4}) + (\frac{p^3}{27})}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q^2}{4}) + (\frac{p^3}{27})}}$.

Comentários: Este é um resultado importantíssimo! É a fórmula para encontrar uma solução para equação do 3^o grau, descoberta por Tartaglia, mas que aparece no livro *Ars Magna* (A Grande Arte), publicado no ano de 1545, escrito pelo matemático italiano Girolamo Cardano [3]. As raízes x_1 e x_2 de uma equação do tipo $ax^2+bx+c=0$ são obtidas fazendo $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Para se obter as três raízes de uma equação do tipo $y^3+py+q=0$ usando a fórmula de Tartaglia, deve-se considerar que $A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4})+(\frac{p^3}{27})}}$ e $B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4})+(\frac{p^3}{27})}}$ tem três raízes distintas cada, e que, a combinação destas raízes geram as três soluções da equação, pois $A^3 = w_1$ e $B^3 = w_2$ geram, cada uma, pelo menos dois números complexos. Isso será visto com mais clareza no Capítulo sobre a fórmula complexa da raiz cúbica usando a forma polar.

2.3 Aula 3

Problema 3: Retorne ao problema introdutório.

a) Mostre que $x = 4$ é solução da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$.

Solução: $4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0$.

b) Divida $x^3 - 15x - 4$ por $x - 4$.

Solução: $x^3 - 15x - 4 = (x-4)(x^2 + 4x + 1)$.

c) Encontre as outras duas soluções da equação e verifique que são números reais.

Solução: $x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4.1.1}}{2.1} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$.

Comentários: O professor pode comentar com seus alunos que uma equação do 3^o grau tem necessariamente uma raiz real (Teorema do Valor Intermediário) e, decompondo, basta achar esta raiz que as outras duas são raízes de uma equação do 2^o grau.

d) Tente usar a fórmula de Tartaglia para obter as soluções da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$.

Solução: Observe que a equação já está na forma $x^3 + px + q = 0$, com $p = -15$ e $q = -4$. Substituindo p e q na forma de Tartaglia, obtemos:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} + \sqrt{(\frac{(-4)^2}{4}) + (\frac{(-15)^3}{27})}} + \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} - \sqrt{(\frac{(-4)^2}{4}) + (\frac{(-15)^3}{27})}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Comentários: O professor deve refletir com seus alunos se, aparentemente, não há algo de errado com o uso da fórmula de Tartaglia. Comentar também que soluções "estranhas" como esta surgiram na idade média e não podiam ser ignoradas. Além da extração de raízes quadradas de números negativos, eles também se deparavam com a extração de raízes cúbicas de números de natureza desconhecida. Quando, nas equações de grau 2 a fórmula levava à raiz quadrada de números negativos, era fácil dizer que aquilo indicava a não existência de soluções, porque os problemas tinham motivações geométricas.

“Agora, entretanto, nota-se que há equações de grau 3 com soluções reais conhecidas, mas cuja determinação passava pela extração de raízes quadradas de números negativos. Isto não ocorre só com esta equação! Não havia como negar que os números reais eram insuficientes para se tratar de equações algébricas. O que estava acontecendo no século XVI era semelhante ao que ocorreu no tempo dos gregos antigos, quando se verificou a insuficiência dos números racionais com a construção do número $\sqrt{2}$, que não era racional: o conceito de número precisava ser estendido.” [4]

Problema 4: Supondo que $\sqrt{-1}$ é um número conhecido e que, com ele, opera-se do mesmo modo que com os outros números que já conhecemos, inclusive com a propriedade que $(\sqrt{-1})^2 = -1$, mostre que $(2+\sqrt{-1})^3 = 2+11\sqrt{-1}$ e $(2-\sqrt{-1})^3 = 2-11\sqrt{-1}$. Conclua que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 4$.

Solução: $(2+\sqrt{-1})^3 = 2^3+3\cdot 2^2\sqrt{-1}+3\cdot 2\cdot\left(\sqrt{-1}\right)^2+(\sqrt{-1})^3 = 2+11\sqrt{-1} = 2+\sqrt{-121}$.

Analogamente, mostra-se que $(2-\sqrt{-1})^3 = 2-11\sqrt{-1} = 2-\sqrt{-121}$.

Extraindo as raizes cúbicas e somando os dois resultados, obtemos que

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 4.$$

Comentários: Foi o matemático italiano, chamado Rafael Bombelli (1526-1572), em sua obra *L’Algebra* [1], quem encontrou uma forma de lidar com esse aparente absurdo. Ele decidiu considerar as raízes quadradas de números negativos como verdadeiros números. Sua proposta levaria à seguinte representação: $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = A+B\sqrt{-1}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = A-B\sqrt{-1}$. Daí, ele teve a ideia de que os próprios radicais poderiam ser relacionados, que, como diríamos agora, eles são imaginários conjugados, com parte real A e partes imaginárias B e $-B$, respectivamente, que, ao serem somados, levam ao número real 4. É evidente que se a soma das partes reais é 4, então a parte real de cada um é A = 2; e se um número da forma $2+B\sqrt{-1}$ foi a raiz cúbica de $2-11\sqrt{-1}$, então $(2+B\sqrt{-1})^3 = 2^3+3.2^2(B\sqrt{-1})+3.2(B\sqrt{-1})^2+(B\sqrt{-1})^3 = (8-6B^2)+(12B-B^3)\sqrt{-1} = 2-11\sqrt{-1}$.

Comparando esta última igualdade, obtemos que $8-6B^2 = 2$ e $12B-B^3 = -11$. Resolvendo o sistema, $B = -1$. Daí ele percebeu a viabilidade de sua proposta. Foi assim, de forma não totalmente confortável, que os matemáticos passaram a usar as raízes quadradas de números negativos. A facilidade de tratar $\sqrt{-1}$ como um número levava à solução, mas ainda com uma sensação de desconfiança. Não por acaso, este número é conhecido como unidade imaginária.

Capítulo 3

Conceitos Básicos

Nos Problemas e Comentários deste Capítulo, exploraremos os conceitos básicos sobre números complexos. Apresentaremos a classificação, a representação desses números e algumas regras operatórias (sem muito rigor!). Queremos, apenas, abrir os horizontes para novas aplicações dos números complexos, que se encontram no Capítulo seguinte. Sugerimos que sejam feitos todos os Problemas na sequência em que estão postos. Para isso, serão necessárias 7 aulas de 50 minutos cada, para o desenvolvimento deste Capítulo.

AULA 1: O professor deve resolver do Problema 5a ao Problema 7. Em seguida, introduzir a definição de números complexos. Os Problemas 5a e 5b têm como objetivo levar os alunos a perceberem a insuficiência dos números reais na radiciação quando o radicando é negativo. O professor deve aproveitar este momento para comentar que, historicamente, tem ocorrido a ampliação de um conjunto numérico sempre que se constata a impossibilidade de se efetuar uma certa operação no conjunto ou de se resolver um problema nesse conjunto. Veja a citação de manoel Paiva em [24].

"A impossibilidade de se efetuarem certas subtrações em $\mathbb{N}$, por exemplo, $3-5$, motivou a criação do conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros; a impossibilidade de se efetuarem certas divisões em $\mathbb{Z}$, por exemplo $3 \div 2$ provocou a criação do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais; o problema da incomensurabilidade, por exemplo a medida da diagonal em um quadrado de lado unitário, exigiu a criação do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O conjunto $\mathbb{R}$ por sua vez, se mostra insuficiente para a extração de certas raízes como, por exemplo $\sqrt{-1}$; isso demanda a criação de um novo conjunto, que será chamado de conjunto dos números complexos, denotado por $\mathbb{C}$."

AULA 2: O professor deve resolver do Problema 8 ao Problema 9b. Aqui serão apresentadas as regras operatórias de números complexos na forma algébrica. Uma maneira simples de o professor orientar os alunos é dizer que estas operações são semelhantes às operações com polinômios. Também é interessante destacar a propriedade cíclica da potenciação da unidade imaginária para expoentes naturais.

AULA 3: O professor deve resolver do Problema 10 ao Problema 11b. Estes Problemas tratam da representação geométrica dos números complexos. É importante destacar que os números reais são representados pelos pontos de uma reta enquanto que os complexos são representados pelos pontos de um plano. O professor deve dar especial atenção ao cálculo do módulo e do argumento.

AULA 4: O professor deve resolver apenas o Problema 12. Este Problema pede para que números complexos na forma algébrica sejam escritos na forma trigonométrica (ou polar), que é a forma usada para se calcular potenciação e radiciação. Portanto, devem-se tirar todas as dúvidas dos alunos antes de passar para os Problemas seguintes. É comum os alunos terem dificuldade para lembrarem certas regras da Trigonometria. Sendo assim, o professor, caso ache necessário, pode relembrar os conceitos que for usar adiante, tais como: circunferência trigonométrica, ângulos notáveis e seus correspondentes, congruência de ângulos, fórmulas de adição de ângulos, etc.

AULA 5: Nesta aula, devem ser resolvidos do Problema 13a ao Problema 13c. Aqui, o professor deve demonstrar, ainda que intuitivamente, a 1^a fórmula de Abraham de Moivre.

AULA 6: O professor deve resolver do Problema 14a ao Problema 14c. Ao resolver o Problema 14a, o aluno já começa a vislumbrar a fórmula para radiciação. O professor deve ir resolvendo esses problemas direcionando os alunos para esta fórmula. Nos Problemas 14b e 14c, o professor deve comentar sobre a distribuição das raízes de um número complexo sobre uma circunferência. Ele deve comentar o fato de que os ângulos entre duas raízes consecutivas são congruentes e que elas se repetem após uma volta, em tal circuferência.

AULA 7: Deve-se resolver apenas o Problema 15 já direcionando o raciocínio para as aplicações em Geometria Plana que serão expostas no Capítulo 4. Por isso, nessa aula, deve-se comentar a relação entre a álgebra e a geometria dos números complexos.

3.1 Aula 1

Problema 5a: Em 1545, o matemático italiano Girolamo Cardano propôs em um de seus livros o seguinte problema: "Divida o número 10 em duas partes de modo que seu produto seja o número 40". Encontre tais números.

Solução: Resolução feita por Cardano (em notação atual): Se chamarmos de z o comprimento de uma das partes, a outra terá comprimento $10-z$ e o problema se traduz na equação $z(10-z) = 40$ que é equivalente a $z^2 - 10z + 40 = 0$, cujas soluções são $z = 5 \pm \sqrt{-15}$.

Comentário: Ele reconheceu que o problema dado não tinha solução. No entanto, percebeu que as soluções encontradas satisfaziam as condições do problema, ao que exclamou: "deixando de lado as torturas mentais envolvidas, somando $5+\sqrt{-15}$ com $5-\sqrt{-15}$ obtém-se 10 e, multiplicando $5+\sqrt{-15}$ por $5-\sqrt{-15}$ obtém-se $25-(-15)$, que é 40!"

Problema 5b: Resolva a equação $z^3 - 14z^2 + 58z = 0$, considerando o conjunto universo: a) dos números reais; b) dos números complexos.

Solução: Colocando z em evidência obtemos $z = 0$ ou $z^2 - 14z + 58 = 0$. Assim, a solução do item a) é $S = \{0\}$ e do item b) é $S = \{0, 7+\sqrt{-9}, 7-\sqrt{-9}\}$.

Comentário: Veja o Comentário de Lima, [5]: *"Embora, historicamente, tenha-se usado o símbolo $\sqrt{-1}$ para representar a unidade imaginária i, é preferível não usá-lo, pois ao escrever $i = \sqrt{-1}$ cometem-se dois erros: afirmar que existem dois valores diferentes para i, pois existem duas raízes quadradas de -1, e, contrariar a propriedade transitiva da igualdade (ver comentário sobre radiciação de números complexos, no Problema 14c). Por isso, a opção para definir a unidade i como sendo um número tal que $i^2 = -1$. Deve-se evitar expressões do tipo: "Equação do segundo grau com solução impossível". "Para simplificar a notação, criou-se o número i, de modo que o quadrado desse número fosse igual a -1." A existência do número i não é uma questão de notação"*

O professor deve mostrar aos alunos que, uma vez introduzida a unidade imaginária i, a solução do Problema 5a pode ser escrita $z = 5 \pm i\sqrt{15}$ e a solução do Problema 5b, item b), pode ser escrita $S = \{0, 7+3i, 7-3i\}$. O professor deve aproveitar este momento para definir número complexo e classificar os números complexos como: real, complexo com partes real e imaginária não nulas ou imaginário puro. Enfatizar que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Problema 6: Sabendo que $i^2 = -1$, encontre o valor real de k de modo que o número $z = (k^2 - 5k + 6) + (k-2)i$ seja:

a) real;

b) complexo com partes real e imaginária não nulas;

c) imaginário puro.

Solução: a) para que z seja real devemos ter $k-2=0$, donde segue que $k=2$.

b) para que z seja complexo com partes real e imaginária não nulas devemos ter $k-2= 0$ e $k^2-5k+6= 0$, obtendo que $k= 2$.

c) para que z seja imaginário puro devemos ter $k-2= 0$ e $k^2-5k+6=0$. Resolvendo esta última equação, obtemos $k=3$ ou $k=2$. Como $k\neq 2$, então $k=3$.

Comentário: Observe que os valores de k que mudam o tipo do número complexo z são 2 e 3. Um erro comum neste Problema é os alunos confundirem em qual situação k deve ser igual ou diferente destes números. Este é o momento adequado para definir a noção de igualdade de números complexos.

Problema 7: Determine os valores dos números reais de a e b de modo que $(a-2b)+ai=3+(3b-2)i$.

Solução: Para que os números complexos sejam iguais devemos impor $a-2b=3$ e $a=3b-2$. Resolvendo este sistema nas variáveis a e b, obtemos $a=13$ e $b=5$.

Comentário: Apesar de parecer óbvio o fato de $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c$ e $b=d$, deve-se comentar que se tivéssemos $b= d$, então o número i seria um número real, pois caberiam os cálculos a seguir: $a+bi=c+di \Leftrightarrow a-c=(d-b)i \Leftrightarrow i=\frac{a-c}{d-b}$, ou seja, i é dado pelo quociente de dois números reais, logo i seria real. Como i não é real, devemos ter $d=b$, e, a partir daí, que $a=c$.

3.2 Aula 2

Para esta aula, o professor deve introduzir as operações elementares com números complexos da seguinte maneira: Dois números complexos quaisquer $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ têm soma e produto, denotados respectivamente por $z_1 + z_2$ e $z_1 z_2$, definidos como os números complexos dados pelas fórmulas:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{3.1}$$

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{3.2}$$

O quociente entre z_1 e z_2, denotado por $\frac{z_1}{z_2}$, é definido como o número complexo dado pela fórmula:

$$\frac{z_1}{z_2} = (\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}) + i(\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}) \tag{3.3}$$

Em particular, tem-se $(x, 0) + (0, y) = (x, y)$ e $(0, y) = (y, 0)(0, 1)$. Assim, cada número complexo, que não é real, pode ser escrito como soma de um número real e um número imaginário puro:

$$z = (x, y) = x + yi. \tag{3.4}$$

De acordo com a definição (3.2), tem-se $(0, 1)^2 = (-1, 0)$, isto é, $i^2 = -1$. Em vista da equação (3.4), a fórmula (3.2) pode ser escrita $(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$. O professor deve também mostrar os valores que i^n assume, para n natural.

Problema 8: Dados os números complexos $z = 2 - 4i$, $w = 5i$ e $v = -1 + 6i$, calcule o valor de $\frac{zw}{v}$.

Solução: Após introduz o conceito de conjugado, o professor pode mostrar a seus alunos que este problema seria resolvido mais facilmente fazendo:

$$\frac{z.w}{v} = \frac{(2-4i).(5i)}{(-1+6i)} = \frac{20+10i}{-1+6i} \cdot \frac{(-1-6i)}{(-1-6i)} = \frac{-20-120i-10i-60i^2}{(-1)^2-(6i)^2} = \frac{40-130i}{37}.$$

Comentário: Logo em seguida, deve-se mostrar as propriedades do conjugado. Outro fato importante é que a divisão $\frac{z \cdot w}{v}$ será feita fazendo $\frac{z \cdot w}{v} \cdot \frac{\bar{v}}{\bar{v}}$. O professor pode aproveitar este momento para relembrar racionalização de expressões do tipo $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, usando o conceito de conjugado. Para facilitar a compreensão, pode-se dizer que as operações de adição, subtração e multiplicação de números complexos da forma $a + bi$, com a e b

reais, comportam-se, em relação a essas operações, como se fossem polinômios.

Problema 9a: Determine a parte real e a parte imaginária do número $z = \frac{i^{91}+2i^{52}-3i^{48}}{3i^{1002}-5i^{400}}$.

Solução: Subsituindo cada exponte pelo resto da divisão por 4, tem-se que:

$$z = \frac{i^{91}+2i^{52}-3i^{48}}{3i^{1002}-5i^{400}} = \frac{i^{3}+2i^{0}-3i^{0}}{3i^{2}-5i^{0}} = \frac{-i+2-3}{-3-5} = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}i.$$

Donde segue que Re(z) = lm(z) = $\frac{1}{8}$.

Problema 9b: Se $z = i^m + i^{-m}$, $m \in \mathbb{Z}$ e i é a unidade imaginária, então qual o número total de possíveis valores diferentes de z?

Solução: O número $z = i^m + i^{-m}$ pode ser reescrito da seguinte maneira: $z = i^m + \frac{1}{i^m} = \frac{i^{2m}+1}{i^m}$. Como $i^2 = -1$, segue que $z = \frac{(-1)^m+1}{i^m}$. Para m ímpar tem-se $z = 0$. Para m par, tem-se duas possibilidades: $i^m = 1$ ou $i^m = -1$, obtendo $z = \frac{2}{1} = 2$ ou $z = \frac{2}{-1} = -2$. Logo, o número total de possíveis valores diferentes de z é três: $z = 0$, $z = 2$ e $z = -2$.

Comentário: No Problema 9b é normal que os alunos achem que o número z dado possa assumir infinitos valores, pelo fato de $\mathbb{Z}$ conter infinitos elementos. Talvez outros alunos achem que $i^m + i^{-m}$ possa assumir exatamente 4 valores devido ao número de valores que i^n, n natural, pode assumir (Problema 9a). Esse é um excelente Problema para o professor introduzir a ideia de padrão de repetição, mostrando que i^m apresentará uma sequência cíclica. O professor pode aproveitar a ocasião para comentar sobre fenômenos periódicos. O objetivo desta atividade é levar os alunos a identificar padrões numéricos e/ou princípios de contagem.

3.3 Aula 3

Aqui, o professor deve introduzir a representação geométrica dos números complexos e o módulo de um número complexo.

Problema 10: Represente geometricamente no plano os números complexos e calcule seus módulos: $z_1 = 1+\sqrt{3}i, z_2 = -2-2i, z_3 = 7i, z_4 = -i, z_5 = 5$.

Solução: Acompanhe a representação geométrica na Figura 3.1.

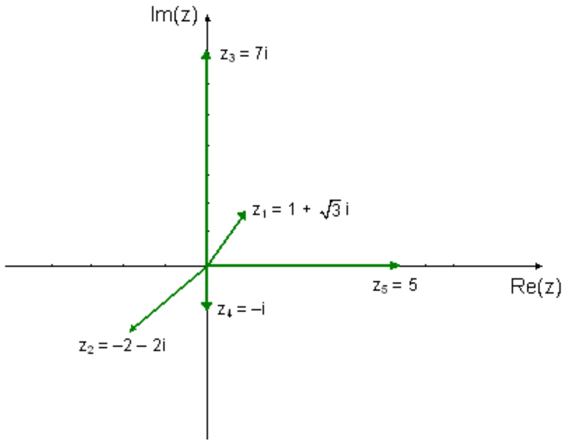


Figura 3.1: Representação geométrica de alguns números complexos.

$|z_1|^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow |z_1| = 2.$

$|z_2|^2 = (-2)^2 + (-2)^2 \Leftrightarrow |z_2| = 2\sqrt{2}.$

$|z_3|^2 = 0^2 + 7^2 \Leftrightarrow |z_3| = 7.$

$|z_4|^2 = 5^2 + 0^2 \Leftrightarrow |z_4| = 5.$

Comentário: Muitos textos dos livros didáticos do Ensino Médio brasileiro confundem afixo com imagem. Mas, afixo e imagem não são sinônimos. A imagem de um complexo é o ponto que o representa, e o afixo de um ponto é o complexo por ele representado.

Aqui deve-se introduzir a forma polar.

Problema 11a: Calcule o argumento dos números complexos $z_1 = 1+\sqrt{3}i$, $z_2 = -2-2i, z_3 = 7i, z_4 = -i, z_5 = 5$.

Solução: Deve-se observar o quadrante a que z pertence para determinar o valor correto do argumento.

$cos\,[\arg(z_1)] = \frac{1}{2}$ e $sen\,[\arg(z_1)] = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo, $\arg(z_1) = 30^o$.

$cos\,[\arg(z_2)] = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ e $sen\,[\arg(z_2)] = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. Logo, $\arg(z_2) = 225^o$.

$cos\,[\arg(z_3)] = \frac{0}{7} = 0$ e $sen\,[\arg(z_3)] = \frac{7}{7} = 1$. Logo, $\arg(z_3) = 90^o$.

$cos\,[\arg(z_4)] = \frac{5}{5} = 1$ e $sen\,[\arg(z_4)] = \frac{0}{5} = 0$. Logo, $\arg(z_4) = 0^o$.

Comentário: O professor deve comentar sobre a variação do argumento: entre 0 e 2π, ou entre $-\pi$ e π, ou entre θ_0 e $\theta_0 + 2\pi$. Introduzir a ideia de argumento principal. Alguns livros do Ensino Médio restringem o argumento de um complexo ao intervalo $[0, 360^o[$, mas, isso invalidaria a operação de multiplicação e de divisão.

Deve-se introduzir as relações entre $\arg(z)$, $\arg(\bar{z})$ e $\arg(-z)$.

Problema 11b: Sabendo que o argumento de um número complexo **z** é 60^o, determine o argumento de cada um dos seguintes números: a) $-z$, b) $\bar{z}$, c) $-\bar{z}$.

Solução: Acompanhe na Figura 3.2.

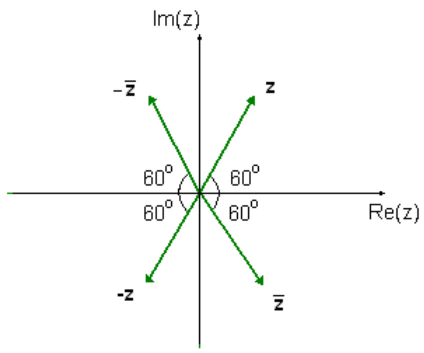


Figura 3.2: Relações entre $\arg(z)$, $\arg(\bar{z})$ e $\arg(-z)$.

$a)\,\arg(-z) = 180^o + \arg(z) = 240^o$.

$b)\,\arg(\bar{z}) = 360^o - \arg(z) = 300^o$.

$c)\,\arg(-\bar{z}) = 180^o - \arg(z) = 120^o$.

Comentário: A partir deste ponto, o professor já pode comentar com seus alunos sobre a maneira que os números complexos podem ser aplicados em problemas que requerem rotações no plano.

3.4 Aula 4

Problema 12: Obtenha a forma trigonométrica ou polar dos números complexos $z_1 = 1+\sqrt{3}i$, $z_2 = -2-2i$,$z_3 = 7i$, $z_4 = -i$, $z_5 = 5$.

Solução: Após calcular o módulo e o argumento de cada um dos números complexos, obtem-se $z_1 = 2(cos60^o + i sen 60^o)$, $z_2 = 2\sqrt{2}(cos 225^o + i sen 225^o)$,
$z_3 = 7(cos 90^o + i sen 90^o)$, $z_4 = 1(cos 270^o + i sen 270^o)$ e $z_5 = 5(cos 0^o + i sen 0^o)$.

Comentário: É importante que os alunos tenham prática com esse tipo de Problema, porque as operações de potenciação e radiciação serão feitas usando a forma trigonométrica.

3.5 Aula 5

Problema 13a: Sejam os números complexos $z_1 = 6(cos\,240^o + isen\,240^o)$, $z_2 = cos\,30^o + isen\,30^o$ e $z_3 = 2(cos\,150^o + isen\,150^o)$. Escreva na forma trigonométrica e algébrica o número a) $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$ e b) $(z_3)^4$.

Solução:

a)

$$\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} = \frac{6(cos\,240^o + isen\,240^o) \cdot (cos\,30^o + isen\,30^o)}{2(cos\,150^o + isen\,150^o)}$$
$$= \frac{6(cos\,270^o + i\,sen\,270^o)}{2(cos\,150^o + i\,sen\,150^o)} = 3(cos\,120^o + i\,sen\,120^o).$$

b) $(z_3)^4 = z_3 \cdot z_3 \cdot z_3 \cdot z_3$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot [cos\,(150^o + 150^o + 150^o + 150^o) + i\,sen\,(150^o + 150^o + 150^o + 150^o)]$$
$$= 2^4[cos\,(600^o) + i\,sen\,(600^o)] = 16(cos\,(600^o - 360^o) + i\,sen\,(600^o - 360^o)$$
$$= 16(cos\,240^o + i\,sen\,240^o)\,.$$

Comentário: Usando indução, podemos obter a primeira fórmula de Abraham De Moivre, para potenciação de números complexos.

Problema 13b: Considerando o número complexo $z = 2(cos\,150^o + i\,sen\,150^o)$, calcule $(z)^{40}$.

Solução:

$$z^{40} = 2^{40}[cos\,(40 \cdot 150^o) + i\,sen\,(40 \cdot 150^o)] = 2^{40}[cos\,(6000^o) + i\,sen\,(6000^o)] =$$
$$2^{40}[cos\,(6000^o - 16 \cdot 360^o) + i\,sen\,(6000^o - 16 \cdot 360^o)] = 2^{40}[cos\,(240^o) + i\,sen\,(240^o)]\,.$$

Problema 13c: Dado o número complexo $z = \sqrt{3} + i$, qual é o menor valor inteiro positivo n para o qual z^n é um número real?

Solução: Escrevendo z na forma polar, tem-se que $z = 2(cos\,30^o + i\,sen\,30^o)$. Daí, $z^n = 2^n[cos\,(n30^o) + i.sen\,(n30^o)]$. Para que z seja real devemos impor que $\text{sen}(n30^o) = 0$, donde segue que $n30^o = k360^o$ ou $n = 12k$. Para que n seja o menor inteiro positivo devemos fazer $k = 1$ o que implica em $n = 12$.

Comentário: Esse Problema recai numa de equação trigonométrica. Caso o professor ache necessário, ele pode revisar o assunto.

3.6 Aula 6

Problema 14a: Resolva a equação $z^6 = 64$, usando a 1^a fórmula de De Moivre.

Solução: Considerando $w = 64 = 64(cos\,0^o + i\,sen\,0^o)$ e z um número da forma $z = |z|(cos\,\theta + i\,sen\,\theta)$, tem-se que:

$z^6 = |z|^6[cos\,(6\theta) + i\,sen\,(6\theta)] = 64(cos\,0^o + i\,sen\,0^o)$.

Daí, obtemos que

$$\begin{cases} |z|^6 = 64 \Leftrightarrow |z| = 2\,, \\ 6\theta = 0 + k360^o \Leftrightarrow \theta = k60^o, \text{com } k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} z_0 = 2 \cdot (cos\,0^o + i\,sen\,0^o) = 2; \\ z_1 = 2 \cdot (cos\,60^o + i\,sen\,60^o) = 1 + i\sqrt{3}; \\ z_2 = 2 \cdot (cos\,120^o + i\,sen\,120^o) = -1 + i\sqrt{3}; \\ z_3 = 2 \cdot (cos\,180^o + i\,sen\,180^o) = -2; \\ z_4 = 2 \cdot (cos\,240^o + i\,sen\,240^o) = -1 - i\sqrt{3}; \\ z_5 = 2 \cdot (cos\,300^o + i\,sen\,300^o) = 1 - i\sqrt{3}. \end{cases}$$

Comentário: O professor deve comentar com seus alunos que se $k \geq 5$, as raízes se repetirão.

Deve ser introduzida a potenciação e a radiciação na forma polar.

Problema 14b: Calcule as raízes quartas do complexo $z = -8 - 8\sqrt{3}i$.

Solução: Sabemos que $z = -8 - 8\sqrt{3}i = 16(cos\,\frac{4\pi}{3} + i\,sen\,\frac{4\pi}{3})$. Queremos encontrar todos os números $w = |w|(cos\theta + isen\theta)$ tais que $w^4 = z$. Logo,

$w^4 = |w|^4[cos\,(4\theta) + i\,sen\,(4\theta)] = 16(cos\,\frac{4\pi}{3} + i\,sen\,\frac{4\pi}{3})$.

Daí, temos que

$$\begin{cases} |w|^4 = 16 \Leftrightarrow |w| = 2, \\ 4\theta = 240^o + k360^o \Leftrightarrow \theta = 60^o + k90^o, \text{com } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} w_0 = 2 \cdot (cos\,60^o + i.sen\,60^o) = 1 + i\sqrt{3}; \\ w_1 = 2 \cdot (cos\,150^o + i.sen\,150^o) = -\sqrt{3} + i; \\ w_2 = 2 \cdot (cos\,240^o + i.sen\,240^o) = -1 - i\sqrt{3}; \\ w_3 = 2 \cdot (cos\,330^o + i.sen\,330^o) = \sqrt{3} - i. \end{cases}$$

Problema 14c: Sabendo-se que uma das raízes quintas de um número complexo z é $w = 2(cos\,10^o + i\,sen\,10^o)$. Determinar as outras quatro raízes quintas de z.

Solução: As outras quatro raízes terão módulo 2 cada uma e seus argumentos diferem $360^o/5 = 72^o$ da raiz consecutiva. Assim, as outras raízes são:

$$2(cos\,82^o + i\,sen\,82^o), \quad 2(cos\,154^o + i\,sen\,154^o),$$

$$2(cos\,226^o + i\,sen\,226^o) \quad \text{e} \quad 2(cos\,298^o + i\,sen\,298^o).$$

Comentário: O professor pode generalizar os resultados dos Problemas 14a, 14b e 14c demonstrando a 2^a Fórmula de De Moivre. Outra observação importante é feita por Lima et al, [5]:

"A radiciação em $\mathbb{C}$ não é uma operação (por exemplo, há três raízes cúbicas complexas distintas de 8 e, portanto, como o resultado não é único, a radiciação não é operação em $\mathbb{C}$), por isso não se deve usar o símbolo $\sqrt[n]{a}$ para indicar as raízes complexas n-ésimas de a. Por exemplo, se escrevermos $\sqrt[3]{8} = 2, \sqrt[3]{8} = -1 + i\sqrt{3}, \sqrt[3]{8} = -1 - i\sqrt{3}$, podemos concluir, equivocadamente, que $2 = -1 + i\sqrt{3} = -1 - i\sqrt{3}$, (pela propriedade transitiva da igualdade): assim, o símbolo $\sqrt[3]{8}$ só deve ser usado para indicar a raiz cúbica real de 8. Se quisermos indicar todas as raízes, devemos escrever por extenso "as raízes cúbicas de 8."

3.7 Aula 7

Problema 15: Represente no Plano de Argand-Gauss as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

Solução: Acompanhe na Figura 3.3

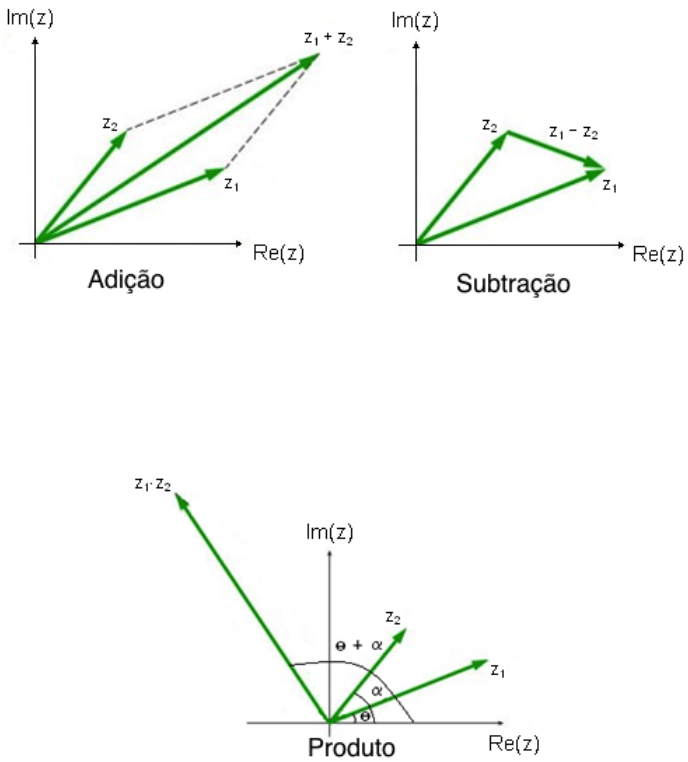


Figura 3.3: Representação geométrica das operações com números complexos.

Observe que a multiplicação de um complexo $z = |z| \cdot (cos\,\theta + i\,sen\,\theta)$ por um complexo $w = |w| \cdot (cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha)$ permanece como resultado um representante vetorial de módulo igual ao módulo do complexo original z multiplicado $|w|$ vezes, rotacionado o $\arg(z) = \theta$ de um ângulo igual a α no sentido trigonométrico (anti-horário). Obviamente, a divisão de complexos também terá uma característica de rotação, neste caso, um giro no sentido anti-horário. O módulo do vetor representante da divisão será o comprimento $|z|$ dividido em $|w|$ vezes.

No caso da potenciação, temos que z^n é o produto de z por ele mesmo n vezes, o que implica em um vetor de tamanho $|z|^n$ e argumento $n\theta$.

No caso da radiciação, temos que $\sqrt[n]{z}$ pode assumir n valores distintos, porém, todos com o mesmo módulo. Assim, os afixos das n raízes n-ésimas de z são pontos da mesma circunferência, com centro na origem do plano de Argand-Gauss e raio $\sqrt[n]{|z|}$. Observe também que os argumentos principais de $\sqrt[n]{z}$ formam uma progressão aritmética que começa com $\frac{\theta}{n}$ e tem razão $\frac{2\pi}{n}$. Assim, os afixos das n raízes n-ésimas de z dividem a circunferência de centro (0, 0) e raio $r = \sqrt[n]{|z|}$ em n partes congruentes. Ligando todos estes pontos, obtém-se um polígono regular de n lados.

Comentário: A representação vetorial de complexos nos permite resolver problemas de vetores com a ferramenta números complexos e vice-versa. Quando multiplicamos um número complexo por i, estamos rotacionando o ponto correspondente em 90^o no sentido anti-horário. Multiplicar um número complexo por $-i$ significa rotacioná-lo 90^o no sentido horário. A soma de um complexo z por outro complexo $w = a + bi$, acarretará na translação do afixo z, sendo acrescentados a unidades a sua componente horizontal, e b unidades a sua componente vertical.

Capítulo 4

Aplicações dos Números Complexos

Neste Capítulo, apresentaremos algumas aplicações dos números complexos que podem ser apresentadas no Ensino Médio. Do Problema 16a ao Problema 17c apresentaremos algumas aplicações à Geometria Plana e Analítica. Destacamos que as operações com esses números estão relacionadas a rotações, translações, simetrias, ampliações e reduções no Plano Complexo.

Os Problemas 18 até o 26 estão relacionados à forma exponencial dos números complexos, dando uma ideia empírica da fórmula de Euler e algumas aplicações.

O Problema 28 traz o teorema de Brahmagupta, uma belíssima aplicação na Aritmética.

AULA 1: O professor deve resolver os Problemas 16a e 16b. Ao apresentar esses Problemas, o professor pode indagar seus alunos se, num primeiro olhar, eles conseguem perceber como os números complexos podem ser usados na resolução. O professor deve convencer os alunos de que esses Problemas são resolvidos mais facilmente usando números complexos do que usando outros recursos da Geometria Analítica, isso despertará o interesse deles pelo assunto.

AULA 2: O professor deve resolver os Problemas 17a, 17b, 17c e 17d. A culminância desta aula é a resolução do Problema 17d, a demonstração do teorema de Napoleão. Para ter sucesso no aprendizado dos alunos, o professor deve resolver os Problemas 17a, 17b e 17c, pré-requisitos para o Problema 17d.

AULA 3: O professor deve resolver apenas o Problema 18. Recomendamos que esta aula seja ministrada em um laboratório de informática. Caso a escola não disponha de um, pode-se utilizar um datashow em sala de aula. O professor pode apresentar a fórmula para o cálculo da constante de Euler sem demonstração porque isso requer conhecimentos de Cálculo Diferencial. Entretanto, consideramos fundamental que a programação da planilha seja feita com a participação dos alunos. Após preparada a planilha, peça aos alunos para calcular os valores que são pedidos no Problema. Caso haja mais tempo, peça aos alunos que calculem outros valores relacionados com a constante de Euler.

AULA 4: O professor deve resolver os Problemas 19 ao 22. O objetivo desta aula é dar uma demonstração empírica da igualdade de Euler. Obviamente que a demonstração completa requer conhecimentos de Cálculo. O que se quer é levar os alunos a terem uma ideia da fórmula que será usada posteriormente na resolução de outros Problemas.

AULA 5: O professor deve resolver os Problemas 23 e 24. No Problema 23, os alunos já começam a perceber a importância da fórmula de Euler a partir do momento em que passam a usá-la para demonstrar as fórmulas de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. No Problema 24, será usada a fórmula de multiplicação numa situação em que os ponteiros de um relógio são representados por números complexos.

AULA 6: O professor deve resolver apenas o Problema 25. Esta aula introduz a ideia de que as cônicas podem ser representadas usando propriedades dos números complexos. Faz-se necessário, pois, que os alunos já tenham conhecimento das cônicas e de seus principais elementos.

AULA 7: O professor deve resolver apenas o Problema 26. O objetivo desta aula é identificar se uma curva do tipo $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ é uma elipse, uma parábola, uma hipérbole ou uma degeneração.

AULA 8: O professor deve resolver os Problemas 27 e 28. Esses são os Problemas que encerram o assunto. Há ainda um Problema intitulado “uma brincadeira boa”. Todos esses Problemas têm um caráter de desafio, por terem respostas surpreendentes. É uma estratégia para o professor finalizar o assunto despertando nos alunos o desejo de se aprofundar mais no estudo dos números complexos.

4.1 Aula 1

Problema 16a: Considere o quadrado $ABCD$ cuja diagonal AC tem extremidades $A(2,2)$ e $C(5,6)$. Determine as coordenadas dos vértices B e D.

Solução: Vamos imaginar o problema no plano complexo. Acompanhe na Figura 4.1.

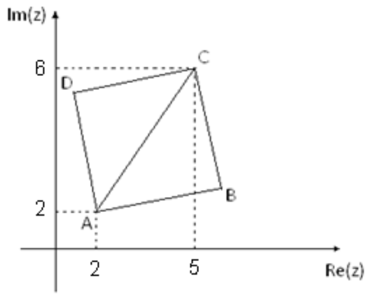


Figura 4.1: Representação do quadrado $ABCD$.

O ponto $A(2,2)$ do plano é uma representação do número complexo $2+2i$. Já o ponto $C(5,6)$ representa o número complexo $5+6i$. Representamos o ponto B por $B(b_1,b_2)$ e o ponto D por $D(d_1,d_2)$, os quais são identificados pelos números complexos b_1+ib_2 e d_1+id_2, respectivamente. Como o vetor $\overrightarrow{BC}$ é obtido com uma rotação de 90^o no sentido horário do vetor $\overrightarrow{BA}$. Em notação complexa, teremos que:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} = C - B \text{ que corresponde à } (5-b_1)+i(6-b_2), \\ \overrightarrow{BA} = A - B \text{ que corresponde à } (2-b_1)+i(2-b_2). \end{cases}$$

Daí, $(5-b_1)+i(6-b_2) = -i((2-b_1)+i(2-b_2)) = 2-b_2+i(b_1-2))$.

Assim,

$$\begin{cases} 5-b_1 = 2-b_2, \\ 6-b_2 = b_1-2. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema , obtemos $b_1 = \frac{11}{2}$ e $b_2 = \frac{5}{2}$. Portanto, $B = (\frac{11}{2}, \frac{5}{2})$.

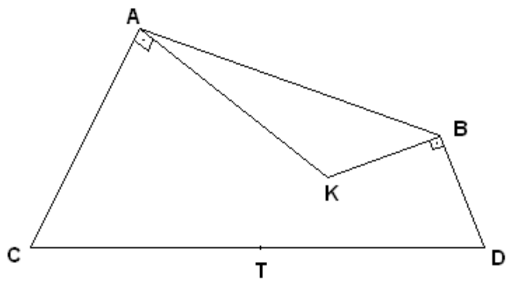
Para encontrar as coordenadas do ponto D poderíamos proceder da mesma forma. Outra maneira, seria perceber que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ são equipolentes (quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento). Ou seja,

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, ou seja, $B - A = C - D$, donde segue que $D = C - B + A = (\frac{3}{2}, \frac{11}{2})$.

Comentário 16a: É importante lembrar que $|z - w|$ representa a distância entre as representações dos complexos z e w no plano. Também se faz necessário esclarecer que vetor é um conceito matemático, não físico. Lembre que a multiplicação de números complexos produz uma rotação do produto destes números. Em particular, a multiplicação por um número complexo de módulo 1 significa uma rotação no plano.

Problema 16b: (IME 79/80) Um velho manuscrito descreve a localização de um tesouro enterrado: Há somente duas árvores, A e B, em um terreno plano, e um canteiro de tomates. A é uma mangueira, e B é uma jabuticabeira. A partir do centro K do canteiro, meça a distância em linha reta até a mangueira. Vire 90^o à esquerda e percorra a mesma distância até o ponto C. Volte ao centro do canteiro. Meça a distância em linha reta até a jabuticabeira. Vire 90^o à direita e percorra a mesma distância até o ponto D. O tesouro está no ponto médio T do segmento CD. Um aventureiro achou o manuscrito, identificou as árvores, mas como o canteiro desapareceu com o passar do tempo, não conseguiu localizá-lo, e desistiu da busca. O aluno Sá Bido, do IME, nas mesmas condições, diz que seria capaz de localizar o tesouro. Mostre como você resolveria o problema, isto é, dê as coordenadas de T em função das coordenadas de $A = (5,3)$ e $B = (8,2)$.

Solução: De acordo com os dados, temos a seguinte representação:



O ponto $A(5,3)$ do plano é uma representação do número complexo $5+3i$. Já o ponto $C(8,2)$ representa o número complexo $8+2i$. Consideremos o sistema de coordenadas como o plano complexo. Da perpendicularidade e o sentido da rotação dos vetores, podemos escrever:

$$\begin{cases} \overrightarrow{KA} \cdot (i) = \overrightarrow{AC}, \\ \overrightarrow{KB} \cdot (-i) = \overrightarrow{BD}. \end{cases}$$

De onde segue que:

$$\begin{cases} (A-K)\cdot i = C-A, \\ (K-B)\cdot i = D-B. \end{cases}$$

Assim, temos que:

$$\begin{cases} C = A\cdot(1+i) - k\cdot i, \\ D = B\cdot(1+i) + k\cdot i. \end{cases}$$

O manuscrito diz que T é o ponto médio de C e D. Então, das expressões acima, podemos escrever:

$T = \frac{C+D}{2} = \frac{A\cdot(1+i)-K\cdot i+B\cdot(1-i)+K\cdot i}{2} = \frac{A\cdot(i+1)+B\cdot(1-i)}{2}.$

Observe que a posição de T não depende da posição de K.

$T = \frac{(5+3i)\cdot(1+i)\cdot(8+2i)\cdot(1-i)}{2} = 6+i.$

O tesouro tem posição com coordenadas (6,1) no mesmo referencial de A e B.

Comentário 16b: Na resolução deste Problema, é importante comentar com os alunos que há casos em que o vetor é representado por uma seta que não parte da origem, como no caso do vetor $\overrightarrow{AB}$ representado na Figura 4.2, em que $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Para encontrarmos um vetor $P(x,y)$ que parta da origem e que tenha a mesmo módulo, direção e sentido do vetor $\overrightarrow{AB}$, basta fazer $x = x_B - x_A$ e $y = y_B - y_A$.

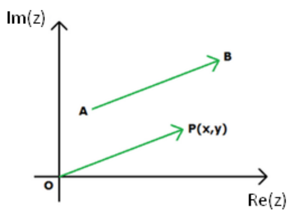


Figura 4.2: Representação do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Dizemos que o vetor P é uma translação do vetor $\overrightarrow{AB}$.

4.2 Aula 2

Problema 17a: Usando a medida de ângulos em radianos e a 2^a fórmula de De Moivre, mostre que as raízes n-ésimas da unidade são do tipo $w_k = [cos\,(\frac{2k\pi}{n}) + i\,sen\,(\frac{2k\pi}{n})]$ para $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Solução: Da 2^a fórmula de De Moivre, temos: $w_k = \sqrt[n]{|z|}[cos\,(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i\,sen\,(\frac{\theta+2k\pi}{n})]$. Como $z = 1 = 1(cos\,0 + i\,sen\,0)$, segue-se que as raízes n-ésimas de 1 são dadas por: $w_k = [cos\,(\frac{2k\pi}{n}) + i\,sen\,(\frac{2k\pi}{n})]$.

Problema 17b: Prove que dois triângulos $\Delta z_1z_2z_3$ e $\Delta w_1w_2w_3$ são semelhantes se, e somente se,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} = \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Solução: (Solução feita por Motta, [6]) Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, (caso LAL) as razões entre as medidas de dois pares de lados correspondentes são iguais e os ângulos entre estes lados são iguais (incluindo a orientação).

Assim, $\Delta z_1z_2z_3$ é semelhante a $\Delta w_1w_2w_3$ se, e somente se, $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \frac{w_2-w_1}{w_3-w_1}$ e

$$arg\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = arg\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Comentário: Essa é uma boa oportunidade para o professor lembrar, da Geometria Plana, que dois triângulos são semelhantes quando os ângulos correspondentes nos dois triângulos são iguais, bem como as razões entre os comprimentos de dois pares de lados correspondentes forem iguais nos dois triângulos. No caso de triângulos com afixos complexos, os ângulos internos são dados por argumentos de diferenças entre complexos. Portanto é necessário tomar cuidado com a orientação do triângulo, assim $\Delta z_1z_2z_3 \neq \Delta z_3z_2z_1$.

Problema 17c: Prove que um triângulo $\Delta z_1z_2z_3$ é equilátero se, e somente se for semelhante ao triângulo $\Delta 1ww^2$, em que w é uma raiz cúbica da unidade, diferente de 1.

Solução: (Solução feita por Motta, [6]) As raízes cúbicas da unidade, diferente de 1, são $\pm\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$, que são as raízes da equação $w^2 + w + 1 = 0$.

O triângulo $\Delta z_1z_2z_3$ é equilátero se, e somente se, $\Delta z_1z_2z_3$ é semelhante a $\Delta z_3z_1z_2$ que ocorre se, e somente se

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_3 & 1 \\ z_2 & z_1 & 1 \\ z_3 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

O que implica em $z_1^2 + z_2^2 + z_2^2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 - z_1 z_2 = 0$ se, e só se,
$(z_1 + wz_2 + w^2 z_3) \cdot (z_1 + w^2 z_2 + wz_3) = 0$ se, e só se,
$(z_1 + wz_2 + w^2 z_3) = 0$ ou $(z_1 + w^2 z_2 + wz_3) = 0$ se, e só se,

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & w & 1 \\ z_3 & w^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & w^2 & 1 \\ z_3 & w & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Calculando o determinante, temos que $\Delta z_1 z_2 z_3$ é semelhante a $\Delta 1 w w^2$ ou $\Delta z_1 z_2 z_3$ é semelhante a $\Delta 1 w^2 w$. Geometricamente, esta última caracterização é bastante intuitiva.

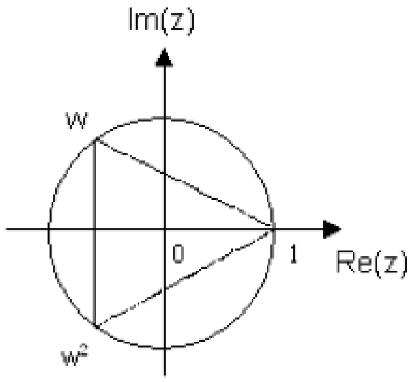


Figura 4.3: Representação das raízes cúbicas da unidade.

Comentário: Este Problema caracteriza os triângulos equiláteros e será usado na resolução do Problema seguinte.

Problema 17d: (Teorema de Napoleão): Sobre cada lado de um triângulo arbitrário, desenhe um triângulo equilátero (no exterior) como na Figura 4.4. Prove que os baricentros desses três triângulos equiláteros são os vértices de um quarto triângulo equilátero.

Solução: (Solução feita por Motta, [6]) Sejam $\Delta z_1 z_2 z_3$ o triângulo dado, $\Delta w_1 z_3 z_2$ e $\Delta z_3 w_2 z_1$, $\Delta z_2 z_1 w_3$ os triângulos equiláteros com a mesma orientação que $\Delta 1 \omega \omega^2$. Com o triângulo $\Delta w_1 z_3 z_2$ é equilátero, então ele é semelhante ao triângulo $\Delta 1 \omega \omega^2$. Logo,

$$\begin{vmatrix} w_1 & 1 & 1 \\ z_3 & \omega & 1 \\ z_2 & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = w_1 \omega + z_3 \omega^2 + z_2 - z_2 \omega - w_1 \omega^2 - z_3 = 0$$

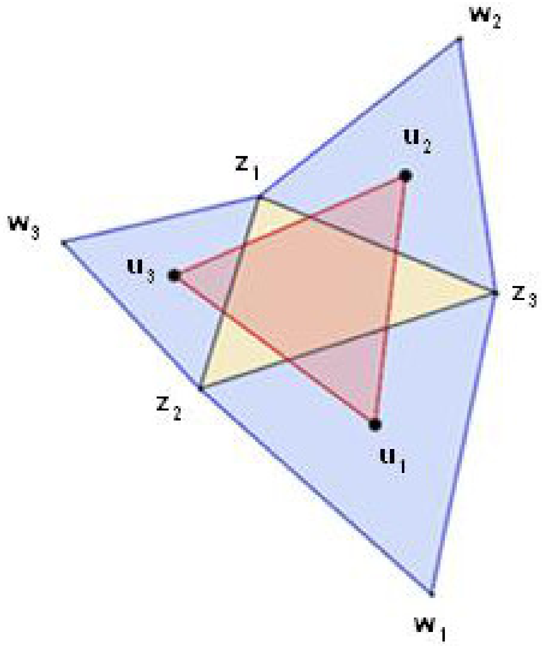


Figura 4.4: Representação do Teorema de Napoleão

se, somente se,

$w_1(\omega-\omega^2)+z_3(\omega^2-1)+z_2(1-\omega)=0$ se, somente se,

$w_1\omega(1-\omega)-z_3(1-\omega)(1+\omega)+z_2(1-\omega)=0$, se e somente se,

$(1-\omega)[w_1\omega-z_3(1+\omega)+z_2]=0$.

Como $(1+\omega)=-\omega^2$, segue que $z_2+w_1\omega+\omega^2z_3=0$.

Analogamente, ocorre com os triângulos $\Delta z_3w_2z_1$ e $\Delta z_2z_1w_3$. O que resulta nos sistema:

$$\begin{cases} w_1+\omega z_3+\omega^2z_2=0, \\ z_3+\omega w_2+\omega^2z_1=0, \\ z_2+\omega z_1+\omega^2w_3=0. \end{cases}$$

Sejam u_1,u_2,u_3, os baricentros desses triângulos. Para provarmos que $\Delta u_1u_2u_3$ é equilátero, basta mostrar que $u_1+u_2\omega+\omega^2u_3=0$. Observe que, somando as equações do sistema acima, membro a membro, tem-se:

$$\frac{1}{3}(w_1+z_3+z_2)+\frac{\omega}{3}(z_3+w_2+z_1)+\frac{\omega^2}{3}(z_2+z_1+w_3)=$$
$$\frac{1}{3}[(w_1+\omega z_3+\omega^2z_2)+(z_3+\omega w_2+\omega^2z_1)+(z_2+\omega z_1+\omega^2w_3)]=0\,.$$

Como $\frac{1}{3}(w_1+z_3+z_2) = u_1$, $\frac{\omega}{3}(z_3+w_2+z_1) = u_2\omega$ e $\frac{\omega^2}{3}(z_2+z_1+w_3) = \omega^2 u_3$, tem-se

$$u_1 + u_2\omega + \omega^2 u_3 = 0\,.$$

Portanto $\Delta u_1 u_2 u_3$ é um triângulo equilátero.

Comentário: Após a resolução deste Problema, o professor pode usá-la para incentivar seus alunos a gostar de Matemática, mostrando que ela tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

4.3 Aula 3

Problema 18: A constante de Euler, denotada por e, pode ser aproximada considerando um número finito de termos pela expressão a seguir, tomando $x = 1$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^N}{N!} + \cdots \tag{4.1}$$

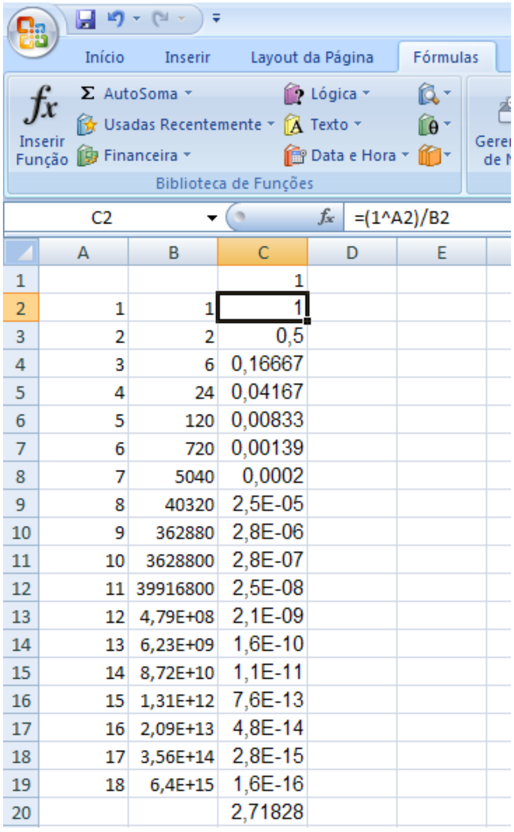
Use uma planilha eletrônica para obter um valor aproximado de valor e, para $N = 4$, para $N = 10$ e para $N = 18$.

Solução: Em uma planilha eletrônica (Figura 4.5), considere as colunas A, B, e C. Nessas colunas realize as seguintes operações:

- Na célula A2 digite 1, nas células A3 digite =(A2+1). Arraste a célula A3 até a célula A19. Assim você terá os números naturais de 1 a 18 na coluna A.
- Digite =FATORIAL(A2) na célula B2.
- Arraste a célula B2, ao longo da coluna B, até o final dos valores digitados na coluna A. Assim você obterá os fatoriais de 1 a 18 na coluna B.
- Digite 1 na célula C1 e digite =(1^A2)/B2 na célula C2
- Arraste a célula C2, ao longo da coluna C, até o final dos valores digitados na coluna A. Assim você obterá os valores dos 19 primeiros termos da forma 1, 1, $\frac{1}{2!}$, $\frac{1}{3!}$,..., $\frac{1}{18!}$.
- Na célula C20, digite =SOMA(C1:C18) na célula C19. Você descobrirá uma aproximação do valor de e através da soma dos 19 primeiros termos da expressão (4.1), com $x = 1$.

O valor encontrado é: $2,71828182845905$.

Comentário: Além do número π, o número irracional transcendente mais conhecido e importante da Matemática é certamente a constante de Euler. Neste Capítulo exploraremos a forma exponencial de um número complexo devido a sua elegância e facilidade de manipulação. Embora o número e tenha um papel importante em Matemática superior, além de inúmeras aplicações na modelagem de problemas em diversas áreas, motivações para a sua introdução no ensino básico não são muito difundidas - diferentemente do que ocorre com o número π, cuja definição como razão entre o perímetro e a diagonal do círculo tem forte apelo geométrico. No caso da constante de Euler, uma dificuldade está no fato de que, embora haja algumas formas equivalentes de definir este número, todas envolvem de alguma forma o conceito de limite. O objetivo deste Problema é levar o aluno a entender como é calculada essa constante, obviamente que a fórmula que a originou só será demonstrada com



	A	B	C	D	E
1			1		
2	1	1	1		
3	2	2	0,5		
4	3	6	0,16667		
5	4	24	0,04167		
6	5	120	0,00833		
7	6	720	0,00139		
8	7	5040	0,0002		
9	8	40320	2,5E-05		
10	9	362880	2,8E-06		
11	10	3628800	2,8E-07		
12	11	39916800	2,5E-08		
13	12	4,79E+08	2,1E-09		
14	13	6,23E+09	1,6E-10		
15	14	8,72E+10	1,1E-11		
16	15	1,31E+12	7,6E-13		
17	16	2,09E+13	4,8E-14		
18	17	3,56E+14	2,8E-15		
19	18	6,4E+15	1,6E-16		
20			2,71828		

Figura 4.5: Planilha Eletrônica.

auxílio de conhecimentos de Cálculo.

4.4 Aula 4

Problema 19: Substitua x por ix na expressão (4.1) do Problema 18 e obtenha uma expressão para e^{ix}, considerando que $i^2 = -1$.

Solução: $e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(i)^N x^N}{N!} + \cdots$

Comentário: Geralmente, os alunos do ensino médio aceitam sem questionamentos o fato de trocarmos x por ix, sem exigir explicações da validade dessa substituição. Um matemático profissional sabe que essa troca requer uma demonstração. Demonstração essa que requer resultados da Análise Complexa. Mas o que se está buscando nesse Problema é dar uma ideia empírica da fórmula de Euler, $e^{ix} = cos\, x + i\, sen\, x$.

Problema 20: Utilizando a expressão obtida no Problema 19, chame de $c(x)$ a soma formada pelos termos que tem expoente par e de $s(x)$ a soma formada pelos termos que tem expoente ímpar, sem o i. Obtenha aproximações para $c(1)$, $s(1)$, $c(\pi)$ e $s(\pi)$, tomando $N = 18$. Use os dados encontrados no passo anterior e aproxime e^i e $e^{i\pi}$.

Solução:

$$c(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^N x^{2N}}{(2N)!} + \cdots,$$

$$s(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^N x^{2N+1}}{(2N+1)!} + \cdots,$$

$$c(1) = 1 - \frac{1^2}{2!} + \frac{1^4}{4!} - \frac{1^6}{6!} + \cdots + \frac{1^{36}}{36!} \simeq 0,54,$$

$$s(1) = 1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} - \frac{1^7}{7!} + \cdots + \frac{1^{37}}{37!} \simeq 0,84,$$

$$c(\pi) = 1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \cdots + \frac{\pi^{36}}{36!} \simeq -1,$$

$$s(\pi) = \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \cdots + \frac{\pi^{37}}{37!} \simeq 0.$$

Comentário: O que está se buscando nesta questão é fazer o aluno perceber, através de casos particulares, a fórmula de Euler. Obviamente, que fazer esses cálculos sem uso de uma calculadora ou de uma planilha torna-se difícil e demanda muito tempo. O professor pode adaptar a planilha do Problema 18 ou trazer os resultados prontos e apresentar para os alunos. Acreditamos ser mais didático que esses cálculos sejam feitos com a participação dos alunos.

Problema 21: Use uma calculadora científica para aproximar o valor do cosseno e do seno de 1 radiano e de π radianos. Compare estes resultados com os resultados obtidos no Problema 20. Podemos afirmar que $e^{ix} = cos\,x + i\,sen\,x$, para todo x real?

Solução: $cos\,(1rad) \simeq 0,54$ e $sen\,(1rad) \simeq 0,84$;

$cos\,(\pi rad) \simeq -1$ e $sen\,(\pi rad) \simeq 0$.

Comentário: Nesse ponto o professor pode introduzir a definição de que $e^{ix} = cos\,x + i\,sen\,x$. Depois de introduzir esta definição, o professor deve mostrar, usando as identidades trigonométricas que $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$; $\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$; $(e^{ix})^n = e^{inx}$ e $(e^{ix})^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{ix}{n}}$. Estes resultados são fundamentais para resolução do Problema 23.

Problema 22: Agora descubra o valor da igualdade de Euler: $e^{i\pi} + 1 = \,?$

Solução: Como $e^{ix} = cos\,x + i\,sen\,x$, então:

$e^{i\pi} + 1 = cos\,\pi + i\,sen\,\pi + 1 = -1 + 0 + 1 = 0.$

Comentário: O bom entendimento da Identidade de Euler auxilia, junto com outras operações matemáticas e estudos de física, na compreensão das equações que regem o funcionamento de muitos fenômenos da natureza. Veja, por exemplo [11].

Esta fórmula é considerada por muitos como uma das fórmulas mais belas da Matemática. Veja, por exemplo, o comentário em [10]: "A beleza da equação é que ela relaciona os cinco números fundamentais da matemática: e, π, i, 0 e 1; e as operações base da matemática: a adição, multiplicação e exponenciação."

Pode-se comentar com os alunos a frase atribuída a Benjamin Pierce (um dos principais matemáticos de Harvard no século XIX): "Cavalheiros, que isto certamente seja verdadeiro é absolutamente paradoxal; não podemos entender a fórmula, não sabemos o que significa. Mas conseguimos prová-la e, portanto, sabemos que deve ser verdade."

4.5 Aula 5

Problema 23: Sabendo que todo número complexo z pode ser escrito sob a forma $z = |z|(cos\,\theta + i.sen\,\theta)$, em que $|z|$ e θ são, respectivamente, o módulo e o argumento de z, obtenha fórmulas para multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números complexos.

Solução: Considerando dois números complexos $z_1 = |z_1|(cos\,\theta_1 + i.sen\,\theta_1)$ e $z_2 = |z_2|(cos\,\theta_2 + i.sen\,\theta_2)$, temos que z_1 e z_2 podem ser escritos sob a forma: $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ e $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$, assim segue-se que:

Multiplicação: $z_1 z_2 = |z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{i\theta_2}$
$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} = |z_1||z_2|[cos\,(\theta_1+\theta_2) + i.sen\,(\theta_1+\theta_2)]$.

Divisão: Supondo $z_2 \neq 0$, temos que: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}}$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[cos\,(\theta_1-\theta_2) + i.sen\,(\theta_1+\theta_2)]$.

Potenciação: $z_1^n = (|z|e^{i\theta_1})^n = |z|^n e^{i\theta_1 n} = |z|^n[cos\,(n\theta_1) + i.sen\,(n\theta_1)]$.

Radiciação: $z_1^n = z_2 \Leftrightarrow |z_1|^n[cos\,(n\theta_1) + i\,sen\,(n\theta_1)] = |z_2|[cos\,\theta_2 + i\,sen\,\theta_2]$, donde segue que:

$$\begin{cases} |z_1|^n = |z_2| \\ n\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases} \quad \text{e daí} \quad \begin{cases} |z_1| = \sqrt[n]{|z_2|} \\ \theta_1 = \frac{\theta_2+2k\pi}{n} \end{cases}, \quad \text{para } 0 \leq k \leq n-1;\ k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, temos que $z_1^n = z_2$ se, e somente se, $z_1 = \sqrt[n]{|z_2|}[cos\,(\frac{\theta_2+2k\pi}{n}) + i.sen\,(\frac{\theta_2+2k\pi}{n})]$, para $0 \leq k \leq n-1;\ k \in \mathbb{N}$.

Comentário: O objetivo desse Problema é mostrar que a forma exponencial é fácil de manipular, podendo ser usada para resolver Problemas e demonstração de propriedades.

Problema 24: (UFRJ 2005) Um jantar secreto é marcado para a hora em que as extremidades dos ponteiros do relógio forem representadas pelos números complexos z e w a seguir: $z = r[cos\,(\pi/2) + i\,sen\,(\pi/2)], w = z^2$, sendo r um número real fixo com $0 < r < 1$.

Determine a hora do jantar.

Solução: Observe que z tem módulo igual a r e argumento $\pi/2$. Como $w = z^2$, então w tem módulo igual a r^2 e argumento π. Pelo fato de $0 < r < 1$, tem-se que $r^2 < r$. Assim, z

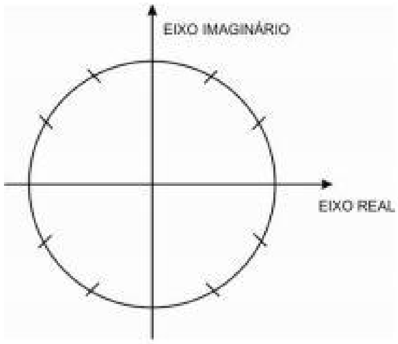


Figura 4.6: Representação de um relógio no plano complexo.

é o ponteiro dos minutos e está apontando para o número 12 do relógio e w é o ponteiro das horas e está apontando para o número 9 do relógio. Logo, a hora do jantar é às 9 horas da noite.

Comentário: O que torna esse Problema interessante e atrai a atenção dos alunos é a descoberta de que podem representar qualquer hora usando complexos. Com um pouco de imaginação, podem ser criados outros problemas a partir deste, em que a posição dos ponteiros tenha certas propriedades. Por exemplo, dá-se a posição de um ponteiro e a relação que este se encontra com o segundo ponteiro, daí pergunta-se que horas são. Outro fato curioso é o Problema não mencionar quais dos números z ou w representa os ponteiros das horas e o dos minutos. Isso o aluno descobre pelo módulo dos complexos envolvidos.

4.6 Aula 6

Problema 25: (ITA 2003). Determine o conjunto dos números complexos z para os quais o número $w = \frac{z+\bar{z}+2}{\sqrt{|z-1|+|z+1|-3}}$ pertence ao conjunto dos números reais. Interprete (ou identifique) este conjunto geometricamente e faça um esboço do mesmo.

Solução: (Solução disponível em [12]). Seja $z = x + yi$ com $x, y \in \mathbb{R}$. Como $z+\bar{z}+2 = 2x+2 \in \mathbb{R}$, temos que:

$w = \frac{2x+2}{\sqrt{|z-1|+|z+1|-3}}$ é um número real se, e somente se, o denominador da fração for real. Mas, isso é equivalente a dizer que $|z-1|+|z+1| > 3$, ou seja:

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{(x+1)^2+y^2} > 3 \Leftrightarrow PF_1 + PF_2 > 3.$$

Onde $P(x,y)$, $F_1(1,0)$ e $F_2(-1,0)$ o que define a região externa de uma elipse de centro $(0,0)$, eixo maior 3, contido no eixo x, e distância focal 2. Sendo b o semi-eixo menor, temos $b^2 = (\frac{3}{2})^2 - (\frac{2}{2})^2 \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Assim, o conjunto dos números complexos $z = x + iy$ para os quais $w \in \mathbb{R}$ satisfaz $\frac{x^2}{(3/2)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5}/2)^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} > \frac{1}{4}$ que graficamente está representado na Figura 4.7:

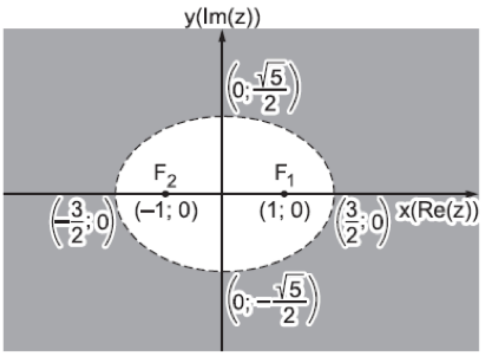


Figura 4.7: Disponível em [12].

Comentário: O professor deve lembrar aos seus alunos que é possível interpretar o módulo da diferença entre dois complexos como sendo a distância entre os afixos dos mesmos no plano complexo. Daí, ele deve mostrar que muitos lugares geométricos (LG) estudados em Geometria Analítica são definidos pelo conceito de distância. Se os LG já foram estudados por esses alunos, o professor não precisará se preocupar com propriedades específicas desses LG, mas sim, como trabalhar no ramo dos complexos. O próximo passo é analisar como descrever esses LG na forma de representação no plano complexo. Como nos exemplos a seguir:

Circunferência: é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um mesmo ponto fixo no plano. A expressão que nos dá a noção de distância é o módulo da diferença entre dois complexos.

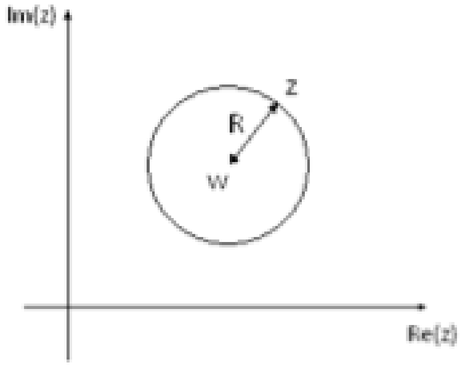


Figura 4.8: $|z-w| = R$. Circuferência de centro em w e raio R. $w \in \mathbb{C}, R \in \mathbb{R}^+$.

Elipse: é o lugar geométrico dos pontos tais que a soma das distãncias desses pontos a dois pontos fixos (os focos da elipse) é constante e igual a distãncia entre os mesmos dois pontos fixos.

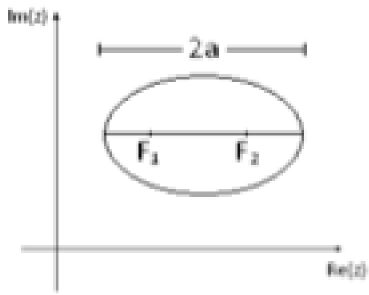


Figura 4.9: $|z-F_1| + |z-F_2| = 2a$. Elipse de focos F_1 e F_2 e eixo maior $2a$. $F_1, F_2 \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}^+$.

Hipérbole: é o lugar geométrico dos pontos tais que o módulo da diferença das distãncias desses pontos a dois pontos fixos (os focos da hipérbole) é constante.

Mediatriz de um segmento: é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de dois pontos fixos no plano.

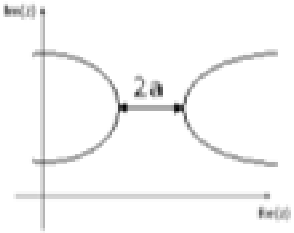


Figura 4.10: $|z-F_1|-|z-F_2|=2a$. Hipérbole de focos F_1 e F_2 e eixo maior $2a$. $F_1,F_2 \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}^+$.

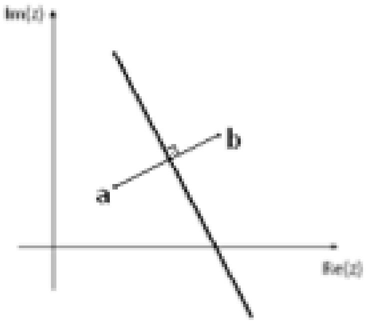


Figura 4.11: $|z-a|=|z-b|$. Reta Mediatriz relativa ao segmento ab com $a,b \in \mathbb{C}$.

4.7 Aula 7

Problema 26: (IME 2011). Determine o valor da excentricidade da cônica dada pela equação $x^2-10\sqrt{3}xy+11y^2+16=0$.

Solução: (Solução disponível em [12]) Vamos aplicar uma rotação nos eixos de coordenadas. Note que tal transformação não altera a excentricidade da cônica dada. A rotação de θ graus no sentido anti-horário corresponde a multiplicar cada complexo (x,y) por $e^{i\theta}=cos\,\theta+i\,sen\,\theta$. Assim, as novas coordenadas (u,v) são obtidas pela equação

$$(u,v)=(x,y)e^{i\theta} \Leftrightarrow (u+vi)(cos\,\theta-i\,sen\,\theta) \Leftrightarrow \begin{cases} x = ucos\,\theta+vsen\,\theta, \\ y=-usen\,\theta+vcos\,\theta. \end{cases} .$$

Nesse novo sistema de coordenadas, uma equação da cônica é:

$$\begin{aligned}(ucos\,\theta+vsen\,\theta)^2-10\sqrt{3}u(cos\,\theta+vsen\,\theta)\cdot(-usen\,\theta+vcos\,\theta)+\\ 11(-usen\,\theta+vcos\,\theta)^2+16=0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&(cos^2\theta + 11sen^2\theta + 10\sqrt{3}sen\,\theta cos\,\theta)u^2 + \\
&(-20sen\,\theta cos\,\theta - 10\sqrt{3}cos^2\theta + 10\sqrt{3}sen^2\theta)uv + \\
&(sen^2\theta + 11cos^2\theta - 10\sqrt{3}sen\,\theta cos\,\theta)v^2 + 16 = 0\,.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Escolhamos θ que torne o termo em $u\,v$ nulo, ou seja, tal que

$$-20sen\,\theta cos\,\theta - 10\sqrt{3}cos^2\theta + 10\sqrt{3}sen^2\theta = 0\,.$$

O que leva à

$$-10\,\text{sen}\,(2\theta) - 10\sqrt{3}cos\;(2\theta) = 0\,, \quad \text{ ou seja,} \quad tg\,(2\theta) = -\sqrt{3}\,.$$

Podemos, então escolher $\theta = -30^o$. Substituindo este valor de θ, na equação (5), obtemos

$$[(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + 11(-\frac{1}{2})^2 + 10\sqrt{3}(-\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})]w^2 + 16 = 0\,,$$

ou seja,

$$-16z^2 + 64w^2 + 16 = 0\,, \quad \text{ ou ainda,} \quad z^2 - \frac{w^2}{(1/4)} = 1\,.$$

Assim, chegamos a equação de uma hipérbole com $a^2 = 1, b^2 = (1/4)$. Daí, obtemos que $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{5}{4}$ e a excentricidade é dada por $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Comentário: O objetivo deste Problema consiste em criar um novo sistema de eixos de mesma natureza, ortogonal, simplesmente rotacionando o sistema original de certa angulação. Usar números complexos para fazer essa rotação é um método mais simples e mais rápido do que usar uma matriz de rotação.

4.8 Aula 8

Para resolver o problema 27 seria necessário antes, definir expoente complexo, mas isso seria algo que, em geral, alunos do ensino médio, teriam dificuldade de entender. Por este motivo, não o faremos aqui. Essa definição está disponível em [9].

Problema 27: Considerando que $e^{ix} = cos\,x + i\,sen\,x$, calcule o valor de i^i.

Solução: Substituindo x por $\frac{\pi}{2}$, segue que: $e^{i\frac{\pi}{2}} = cos\,\frac{\pi}{2} + i\,sen\,\frac{\pi}{2} = i$. Daí, $(e^{i\frac{\pi}{2}})^i = i^i = e^{\frac{-\pi}{2}} \cong 0,207879576$.

Comentário: Esse Problema tem como objetivo surpreender o aluno pelo fato de i^i ser um número real. Além disso, o resultado envolve as constantes mais famosas da matemática, π e e. É de se esperar que eles contestem esse resultado!

Problema 28: Prove o Teorema de Brahmagupta [10]: Se a e b são números naturais e cada um deles é a soma de dois quadrados perfeitos então ab também é uma soma de dois quadrados perfeitos. Escreva $(5^2+6^2)(7^2+10^2)$ como uma soma de dois quadrados perfeitos.

Solução: Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ e $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ tais que $a = p^2+q^2$ e $b = r^2+s^2$, $z = p+iq$ e $w = r+is$. Logo, $ab = (p^2+q^2)(r^2+s^2) = (z\bar{z})(w\bar{w})$. Assim:

$$\begin{aligned}
ab &= (p+iq)(p-iq)(r+is)(r-is)\\
&= (pr+ips+iqr+i^2qs)(pr-ips-iqr+i^2qs)\\
&= [(pr-qs)+i(ps+qr)][(pr-qs)-i(ps+qr)]\\
&= (pr-qs)^2 - i^2(ps+qr)^2\\
&= (pr-qs)^2 + (ps+qr)^2.
\end{aligned}$$

Mostrando que ab é também a soma de dois quadrados perfeitos, o que conclui a demonstração.

Se $p = 5$, $q = 6$, $r = 7$ e $s = 10$, teremos:
$(5^2+6^2)(7^2+10^2) = (5.7-6.10)^2 + (5.10+6.7)^2 = 25^2+92^2$
Obs.: Há outra solução: 95^2+8^2.

Comentário: Essa é uma aplicação dos números complexos na Aritmética. Dificilmente um aluno de Ensino Médio perceberia que é possível usar números complexos para resolver um problema relacionado a números naturais.

Uma brincadeira boa [10]: Encontre o erro da sentença a seguir:

$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{(-1)}\cdot\sqrt{(-1)} = i\cdot i = i^2 = -1.$

Solução: O erro é que: $\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ se a e b são números reais e $a \geq 0$ e $b \geq 0$.

Comentário: Esse Problema tem um perfil de brincadeira; pode ser usado como desafio. É uma maneira de terminar o assunto de forma bem humorada e mostrando uma propriedade importante da radiciação.

Capítulo 5

Conclusões

Ao término desse trabalho, estou convicto de que o assunto de Números Complexos pode ser ensinado no Ensino Médio abordando os reais fatos do seu surgimento bem como podem ser exploradas suas aplicações. Afirmamos isto por acreditar que qualquer aluno de Ensino Médio, que tenha conhecimentos básicos sobre geometria plana e analítica, é capaz de entender os problemas e soluções que estão sendo propostos neste trabalho.

Concordamos com Reis Neto ([9]) quando o mesmo afirma:

"Permanece como maneira mais comum de introduzir os complexos a abordagem puramente algébrica e formal: 'Um número complexo é um objeto da forma $a+bi$, onde a e b são reais, $i^2 = -1$, e permanecem válidas as leis operatórias básicas da álgebra...'. Esta definição (correta) permite começar logo a operar com complexos sem dificuldade, mas este enfoque perde a magnífica oportunidade de apresentar os complexos imediatamente como entes geométricos, e a experiência da sala de aula nos mostra que muitas vezes esta oportunidade não se recupera, mesmo quando, mais tarde, aparece a forma trigonométrica. O iniciante permanece com uma visão excessivamente formal e algebrizante, e não lhe ocorre aplicar conhecimentos de números complexos a problemas de Geometria, como se faz desde Gauss."

Sinto-me satisfeito ao ver o resultado final do trabalho, pois, além de adquirir novos métodos/estratégias de ensino, as aprendizagens foram muitas a cada vez que se tornava necessário fazer alterações, opções, modificações, correções e reajustes no texto como um todo.

Sabemos, com certeza, que não esgotaremos o assunto. Queremos apenas provocar com nossa visão sobre "Números Complexos para o Ensino Médio: uma abordagem com história, conceitos básicos e aplicações" que outras visões surjam, e novos caminhos sejam traçados, e que trabalhos posteriores nos completem e nos superem.

Referências Bibliográficas

[1] BOMBELLI, Rafael. *L'Algebra.* 1572.

[2] BRASIL. MEC. SEF. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).* Brasília, 1998.

[3] CARDANO, Girolamo. *Ars Magna.* 1545.

[4] CERRI, Cristina e MONTEIRO, Marta. *História dos Números Complexos.* USP-SP, 2001.

[5] LIMA, Elon Lages. Et al. *Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio.* IMPA/SBM. Rio de Janeiro, 2001.

[6] MOTTA, Edmilson Luis Rodrigues. *Aplicações dos Números Complexos à Geometria.* Revista Eureka, N^o 6. São Paulo, 1999.

[7] OLIVEIRA, Carlos Nely Clementino de. *Números Complexos: Um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2010.

[8] PAIVA, Manoel Rodrigues. *Matemática: Conceitos, Linguagem e Aplicações.* Ensino Médio (Vol. 3). 1^a Edição. Ed. Moderna. São Paulo, 2009.

[9] REIS NETO, Raimundo Martins. *Alternativa metodológica para ensino e aprendizagem de números complexos: uma experiência com professores e alunos.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica. Belo Horizonte, 2009.

[10] *http://biztechbrz.wordpress.com/2011/02/05/numeros-complexos-aplicacao-pratica.* Consulta realizada em 06.08.2012.

[11] *http://pt.wikipedia.org/wiki/Ars_Magna.* Consulta realizada em 03/08/2012.

[12] *www.etapa.com.br/etaparesolve.* Consulta realizada em 06/09/2012.

Apêndice A

Um Pouco Mais de História

Em geral, os problemas matemáticos mais antigos tinham motivações geométricas. Problemas cujas soluções resultassem em raízes de números negativos eram tidos como insolúveis e qualquer resultado desta natureza era desprezado. Chama a atenção a maneira com que foram tratados nessa primeira fase. Veja o que foi dito por alguns matemáticos:

"... como na natureza das coisas, um negativo não é um quadrado, ele não tem, portanto raiz quadrada." (Mahavira, matemático indiano, 850 d.C.);

"O quadrado de um afirmativo é afirmativo; e a raiz quadrada de um afirmativo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um negativo; pois ele não é um quadrado." (Bhaskara, matemático indiano, 1114-1185).

Para compreendermos esse fato é importante ver que o contexto histórico, os conceitos disponíveis e os problemas considerados, foram limitantes importantes. Por exemplo, se estamos procurando um retângulo de perímetro 4 e área 7, e chamamos de x o comprimento deste retângulo chegando a equação de segundo grau $x^2 - 2x + 7 = 0$, nada mais natural que descartar raízes negativas concluindo que tal retângulo não existe.

Durante mais de dois séculos, suas propriedades foram desenvolvidas, mas eram tratadas como algo sem sentido. Somente na virada do século XVIII para o século XIX, graças a Wessel, Argand e Gauss, se compreendeu que os complexos não têm nada de "inúteis" (como foram tratados por Girolamo Cardano em 1545). São apenas os pontos (ou vetores) do plano, que se somam por composição de translações, e que se multiplicam por composição de rotações e homotetias [23].

O símbolo $\sqrt{-1}$ foi introduzido em 1629 por Albert Girard. O símbolo i foi usado pela primeira vez para representar $\sqrt{-1}$ por Leonhard Euler em 1777. O mesmo apareceu impresso pela primeira vez em 1794 e se tornou amplamente aceito após seu uso por Karl

Friederich Gauss em 1801. Os termos real e imaginário foram empregados pela primeira vez por René Descartes em 1637. A expressão número complexo foi introduzida por Gauss em 1832.

Parece que prevendo o futuro dos números complexos e a imensa quantidade destas aplicações, o grande matemático Leibniz afirmou: *"O Espírito Divino expressou-se sublimemente nesta maravilha da Análise, neste portento do mundo das ideias, este anfíbio entre o ser e o não ser, que chamamos de raiz imaginária da unidade negativa".*

Ainda restavam outras questões importantes sobre as equações algébricas que ainda não haviam sido respondidas. Será que outros números não conhecidos poderiam vir a ser necessários para que outras equações pudessem ser resolvidas? Vejamos quem colocou um ponto final nessa questão:

Depois que Euler mostrou que as equações do tipo $z^n = w$ tinham n soluções em $\mathbb{C}$, os matemáticos passaram a acreditar que toda equação de grau n deveria ter n raízes complexas. Vários matemáticos tentaram provar esta conjectura e Jean le Rond d'Alembert publicou, em 1746, algo que considerou uma prova deste fato. Entretanto um jovem matemático mostrou que tal prova era "insatisfatória e ilusória" e apresentou uma demonstração correta. Este matemático foi Karl Friedrich Gauss. Aos 21 anos, em 1799, Gauss apresentou o que ainda hoje é considerado a maior tese de doutorado em Matemática de todos os tempos. Nela está a prova do Teorema Fundamental da Álgebra, cuja denominação foi dada pelo próprio Gauss. Esse teorema afirma que:

"Toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, pelo menos, uma raiz complexa."

A demonstração deste importante resultado não é simples. A mais fácil disponível foi produzida por Argand em 1815 e simplificada por Cauchy, e pode ser vista em [9]. Com o teorema de Gauss, o procurado e esperado resultado sobre equações algébricas pode finalmente ser provado.